Devoir sur Table 1

Durée : 4h

1. Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
2. Tous les documents sur papier sont interdits.
3. Les calculatrices ne sont pas autorisées.
4. Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
5. La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
6. Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
7. Mettez en évidence vos résultats en les encadrant.
8. Conformément au règlement de la Banque PT
   - Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
   - L'usage de liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

Le soin apporté à la copie fera l'objet d'une évaluation suivant les critères suivants :
- Mise en évidence des résultats
- Soin et lisibilité de la copie. En particulier les traits, y compris pour les ratures, devront être tracés à l'aide d'une règle
- Respect des consignes concernant le liquide de correction et le dérouleur de ruban correcteur
- Respect de la grammaire et de l'orthographe

Exercice 1

(Maths B, Banque PT 2025)

L'objectif de cet exercice est de résoudre sur $]1;+\infty[$, l'équation différentielle

$$(3x+1)y+(2-x)y'-\frac{x}{2}\left(3x^2+2x-2\right)y''=3\left(x^2+x+1\right) \qquad \text{(E)}$$

On note (H) l'équation différentielle homogène associée à (E) :

$$(3x+1)y+(2-x)y'-\frac{x}{2}\left(3x^2+2x-2\right)y''=0 \qquad \text{(H)}$$

On désigne par S l'ensemble des solutions réelles de (E) sur $]1;+\infty[$ et par S_H l'ensemble des solutions réelles de (H) sur $]1;+\infty[$.

Partie I

1. Démontrer que $\forall x \in]1;+\infty[,\ 3x^2+2x-2 \neq 0$.
2. Démontrer que S_H est un sous-espace vectoriel de l'ensemble D_2 des fonctions deux fois dérivables sur $]1;+\infty[$.

   On admet que S_H est de dimension 2.
3. Démontrer que la fonction f_1 définie sur $]1;+\infty[$ par

$$\forall x \in]1;+\infty[, \qquad f_1(x)=\frac{1}{x}.$$

est solution de (H) sur $]1;+\infty[$.

Partie II

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

4. La matrice A est-elle inversible ?
5. Déterminer le noyau de A.
6. Démontrer que l'image de A est le plan d'équation $3x = y + 2z$.
7. Sans résoudre les systèmes, déterminer à l'aide des questions précédentes quel est le nombre de solutions (éventuellement infini) de :

$$\mathcal{S}_1 : AX = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{S}_2 : AX = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

8. Résoudre le système $\mathcal{S}_2 : AX = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Partie III

L'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2 est noté $\mathbb{R}_2[X]$ et sa base canonique est $\mathcal{B} = \left(1, X, X^2\right)$. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \qquad \varphi(P) = (3X+1)P + (2-X)P' - \frac{X}{2}\left(3X^2 + 2X - 2\right)P''.$$

9. Calculer $\varphi(1), \varphi(X), \varphi\left(X^2\right)$.
10. Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
11. Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.
12. En déduire, sans calcul, le noyau de φ ainsi qu'une solution de l'équation

$$\varphi(P) = 3\left(X^2 + X + 1\right).$$

Partie IV

13. Déterminer S_H puis S.

Exercice 2

(Adapté de Ecricome S 2015)

1. On note pour tout $x \in I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$f(x) = \frac{1}{3}(2\sin(x) + \tan(x)) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{3\sin(x)}{2+\cos(x)}.$$

   (a) Factoriser le polynôme $P(X) = 2X^3 - 3X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.
   (b) On pose $u(x) = f(x) - x$ pour tout $x \in I$.
   Justifier que u est dérivable sur I et que pour tout $x \in I$, $u'(x) = \dfrac{P(\cos(x))}{3\cos^2(x)}$.
   (c) En déduire les variations de u sur I.
   (d) On pose $v(x) = x - g(x)$ pour tout $x \in I$.
   Justifier qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$, de degré deux, tel que pour tout $x \in I$, $v'(x) = \dfrac{Q(\cos(x))}{(2+\cos x)^2}$.
   (e) En déduire les variations de v sur I.

(f) Montrer que :

$$\forall x \in I,\ g(x) < x < f(x).$$

2. (a) En utilisant le fait que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}$, calculer $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

   (b) Déduire de la question 1.(f) un encadrement de π.

3. On pose pour tout entier naturel n,

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right) \quad \text{et} \quad b_n = \cos\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right).$$

   (a) Justifier que pour tout réel θ,

$$\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta),$$

   et en déduire que pour tout entier naturel n,

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1-b_n}{2}} \quad (*) \qquad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{\frac{1+b_n}{2}} \quad (**)$$

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$9\times 2^n \frac{a_n}{2+b_n} < \pi < 2^n\left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right).$$

   (c) Justifier que les deux termes de l'encadrement précédent tendent vers π quand n tend vers l'infini.

Exercice 3
(E.P.I.T.A. PT 2018)

Dans cet exercice, on étudie par deux méthodes la nature de la série harmonique $\sum \dfrac{1}{n}$, et pour tout entier $n \geqslant 1$, on introduit la somme partielle :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

1. *Question préliminaire*

   Étudier la monotonie de la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$.

   En déduire que cette suite admet une limite finie L ou bien diverge vers $+\infty$.

2. *Première méthode*

   (a) Etablir l'inégalité suivante pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$$

   (b) En déduire que la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ diverge vers $+\infty$.

3. *Deuxième méthode*

   (a) Vérifier l'inégalité suivante pour tout entier $k \geqslant 1$:

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}$$

   (b) En déduire l'inégalité suivante pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$H_n - 1 \leqslant \ln(n) \leqslant H_n - \frac{1}{n}$$

   En déduire l'inégalité $\ln(n) \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$.

   (c) Établir la divergence de $(H_n)_{n\geqslant 1}$ vers $+\infty$ et montrer que $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

(d) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $\gamma_n = H_n - \ln(n)$.

Étudier le signe de l'expression $\gamma_n - \gamma_{n-1}$ pour tout entier $n \geqslant 2$ et montrer que $0 \leqslant \gamma_n \leqslant 1$.

En déduire la convergence de la suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ vers un réel γ appartenant à $[0,1]$ et la formule :

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$$

Exercice 4

(*Adapté de Maths A, Banque PT 2021*)

On étudie le processus de fonctionnement d'un appareil utilisé chaque jour dans une usine et susceptible de subir des pannes accidentelles. On fait les hypothèses suivantes :

— Le comportement de l'appareil au jour $n+1$ ne dépend que de son état au jour n et pas des jours précédents.

— Si l'appareil fonctionne le jour n, il a une probabilité α d'être en panne le jour $n+1$.

— Si l'appareil est en panne au jour n, il a une probabilité β d'être réparé et de fonctionner le jour $n+1$.

— On a $0 < \alpha < 1$ et $\beta > 0$.

Formellement, si l'on appelle X_n la variable aléatoire qui vaut 1 si l'appareil fonctionne le jour n et 0 si l'appareil est en panne au jour n, on a :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 1) = \alpha,$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | X_n = 0) = \beta.$$

On note $p_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$.

1. (a) Calculer p_2 en fonction de p_1.

   (b) Plus généralement, montrer que, pour tout $n \geqslant 1$,

   $$p_{n+1} = \beta + (1 - \alpha - \beta)p_n.$$

   (c) En déduire une expression de p_n en fonction de p_1.

   (d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

2. On suppose dans cette question que $p_1 = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$.

   (a) Calculer la loi de X_2.

   (b) Calculer la loi du couple (X_1, X_2).

   (c) Calculer l'espérance et la variance de X_1 et de X_2.

   (d) Calculer la covariance entre X_1 et X_2.

   (e) Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Corrigé

Corrigé de l'exercice 1

Partie I

1. Soit $x \in]1;+\infty[$, on a alors $2x > 2$ et ainsi
$$3x^2 + 2x - 2 > 3x^2 > 3 > 0$$
2. La fonction nulle est clairement solution de l'équation (H).
Soit f et g deux solutions de (H) et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors, pour $x > 1$
$$\begin{aligned}(3x+1)(f+\lambda g)(x) + (2-x)(f+\lambda g)'(x) - \frac{x}{2}\left(3x^2+2x-2\right)(f+\lambda g)''(x) &= (3x+1)f(x) + (2-x)f'(x) - \frac{x}{2}\left(3x^2+2x-\right. \\ & 0 + \lambda \times 0 \\ &= 0\end{aligned}$$
Ainsi $\boxed{S_H \text{ est un sous-espace vectoriel de } D_2.}$
3. Pour $x > 1$ on a
$$\begin{aligned}(3x+1)f(x) + (2-x)f'(x) - \frac{x}{2}\left(3x^2+2x-2\right)f''(x) &= \frac{3x+1}{x} - \frac{2-x}{x^2} - \frac{2x\left(3x^2+2x-2\right)}{2x^3} \\ &= \frac{3x^2+x}{x^2} - \frac{2-x}{x^2} - \frac{3x^2+2x-2}{x^2} \\ &= \frac{3x^2+x-2+x-3x^2-2x+2}{x^2} \\ &= 0\end{aligned}$$
Ainsi $\boxed{f_1 \text{ est solution de } (H) \text{ sur } [1,+\infty[.}$

Partie II

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

4. On va employer une méthode permettant de répondre simultanément aux questions 4. et 5. pour gagner un peu de temps.

> **Méthode**
> On aurait aussi pu simplement calculer le déterminant de A mais on va de toute façon devoir faire le calcul du noyau donc autant en profiter.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ on a alors
$$\begin{aligned} X \in \operatorname{Ker}(A) &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x + 6z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ -6y + 6z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow X \in \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$
Puisque $\operatorname{Ker}(A) \neq \{0_{3,1}\}$ on en déduit que $\boxed{A \text{ n'est pas inversible.}}$

5. Le calcul de la question précédente nous montre que

$$\boxed{\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right)}$$

6. Le théorème du rang appliqué à A nous assure que $\operatorname{Im}(A)$ est de dimension 2, c'est donc un plan vectoriel.

   Notons P le plan d'équation $3x = y + 2z$. On a également $\dim(P) = 2$, il nous suffit donc de montrer que $\operatorname{Im}(A) \subset P$.

   Or $\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\6\\-.3\end{pmatrix}\right)$.

   On constate que $3 \times 1 = 3 + 2 \times 0$, $3 \times 2 = 0 + 2 \times 3$ et $0 = 6 + 2 \times (-3)$.

   Ainsi $\operatorname{Im}(A) \subset P$ et donc $\boxed{\operatorname{Im}(A) = P.}$

7. Il est clair que $9 \neq -1+4$, ainsi $\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} \notin \operatorname{Im}(A)$. $\boxed{\text{L'équation } \mathcal{S}_1 \text{ n'a donc pas de solution}}$.

   On a par contre $3 \times 3 = 3 + 2 \times 3$, ainsi $3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \in \operatorname{Im}(A)$.

   Notons $Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $AY = 3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

   Soit $X \in \operatorname{Ker}(A)$, on a alors $A(X+Y) = 0_{3,1} + 3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

   Ainsi toutes les matrices colonnes de la forme $Y + X$ avec $X \in \operatorname{Ker}(A)$ sont solutions de $\mathcal{S}_2$. Comme $\operatorname{Ker}(A)$ est un ensemble infini on en déduit que

   Remarque

   Tous les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels sauf $\{0\}$ sont de cardinal infini

   $\boxed{\mathcal{S}_2 \text{ a un nombre infini de solutions.}}$

8. Notons $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, alors

$$AX = 3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+2y &=& 3\\ 3x+6z &=& 3\\ 3y-3z &=& 3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+2y &=& 3\\ -6y+6z &=& -6\\ 3y-3z &=& 3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+2y &=& 3\\ y-z &=& 1\\ 0 &=& 0\end{array}\right.$$

$$X \in \left\{\begin{pmatrix}3-2y\\y\\y-1\end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}\right\}$$

Ainsi $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } \mathcal{S}_2 \text{ est } \left\{\begin{pmatrix}3-2y\\y\\y-1\end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}\right\}}$

Partie III

9. On a, après calcul,

$$\begin{cases}\varphi(1) &= 3X+1\\ \varphi(X) &= 3X^2+2\\ \varphi\left(X^2\right) &= -3X^2+6X\end{cases}$$

10. La linéarité de φ est facile à vérifier, le cur de la question est de montrer que, si $P \in \mathbb{R}_2[X]$ alors $\varphi(P)$ aussi.

Soit $P = aX^2 + bX + c$ avec $(a,b,c) \in R^3$, alors

$$\varphi(P) = \underbrace{a\varphi(X^2)}_{\in \mathbb{R}_2[X]} + \underbrace{b\varphi(X)}_{\in \mathbb{R}_2[X]} + \underbrace{c\varphi(1)}_{\in \mathbb{R}_2[X]} \in \mathbb{R}_2[X]$$

Ainsi $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_2[X]}$

11. Le calcul de $\varphi(1)$, $\varphi(X)$, $\varphi(X^2)$ nous donne $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = A}$
12. Il nous suffit de reprendre les résultats de la partie précédente. On en déduit que

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}\left(X^2 + X - 2\right)}$$

Et

$$\varphi(P) = 3\left(X^2 + X + 1\right) \Leftrightarrow P \in \left\{3 - X^2 + \lambda(X^2 + X - 2)\right\}$$

Partie IV

13. Les questions précédentes nous montrent que

$$\{x \mapsto a\frac{1}{x} + b(x^2 + x - 2)\ ,\ (a,b) \in \mathbb{R}\} \subset S_H$$

Les fonctions $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $f_2 : x \mapsto x^2 + x - 2$ forment une famille libre (car non-colinéaires), ainsi $\dim(\mathrm{Vect}(f_1, f_2)) = 2 = \dim(S_H)$.
Par inclusion et égalité des dimensions on a

$$\boxed{S_H = \mathrm{Vect}(f_1, f_2) = \{x \mapsto a\frac{1}{x} + b(x^2 + x - 2)\ ,\ (a,b) \in \mathbb{R}\}}$$

le calcul de la question nous assure de plus que $g : x \mapsto 3 - x^2$ est une solution de (E).
Finalement

$$\boxed{\{x \mapsto a\frac{1}{x} + b(x^2 + x - 2) + 3 - x^2\ ,\ (a,b) \in \mathbb{R}\}}$$

Corrigé de l'exercice 2

1. (a) On a $P = 2X^3 - 3X^2 + 1 = (X-1)(2X^2 - X - 1) = (X-1)(X-1)(2X+1)$ d'où $\boxed{P(X) = (X-1)^2(2X+1).}$

   (b) u est une somme de trois fonctions dérivables sur I, $\boxed{\text{elle est donc dérivable sur } I}$, et

   $$\forall x \in I, \qquad u'(x) = \frac{1}{3}\left(2\cos(x) + \frac{1}{\cos^2(x)}\right) - 1 = \frac{1}{3}\left(\frac{2\cos^3(x) + 1 - 3\cos^2(x)}{\cos^2(x)}\right)$$

   Ainsi

   $$\boxed{\forall x \in I, u'(x) = \frac{P(\cos(x))}{3\cos^2(x)}}$$

   (c) $u'(x)$ est du signe de $P(\cos(x)) = (\cos(x) - 1)^2(2\cos(x) + 1)$. Ainsi $u'(x)$ est du signe de $2\cos(x) + 1$,

   Or, pour tout $x \in I$, on a $1 > \cos(x) > 0 > \dfrac{-1}{2}$ donc, pour tout $x \in I$ $P(\cos x) > 0$, et par suite $u' > 0$ sur I.

   Ainsi $\boxed{u \text{ est strictement croissante sur } I.}$

(d) Notons que g est dérivable sur I car quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. v est alors dérivable sur I comme différence de fonctions dérivables.

Pour $x \in I$, on a

$$g'(x) = \frac{3\cos x \times (2+\cos x) - 3\sin x \times (-\sin x)}{(2+\cos x)^2} = \frac{6\cos x + 3}{(2+\cos x)^2}$$

D'où

$$v'(x) = 1 - g'(x) = \frac{(2+\cos x)^2 - 6\cos x - 3}{(2+\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x - 2\cos x + 1}{(2+\cos x)^2}$$

Finalement, pour tout $x \in I$ on a $\boxed{v'(x) = \frac{Q(\cos x)}{(2+\cos x)^2} \text{ où } Q = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2.}$

(e) Q est positif et ne s'annule qu'en 1, et, sur I, cos ne prend jamais la valeur 1, donc v' est strictement positive sur I.

Ainsi $\boxed{v \text{ est strictement croissante sur } I.}$

(f) u et v sont strictement croissante et vérifient

$$\lim_{x\to 0} u(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} v(x) = 0$$

Ainsi

$$\forall x \in I, \qquad u(x) > 0, \qquad v(x) > 0$$

Ou encore

$$\forall x \in I, \qquad f(x) > x, \qquad x > g(x)$$

On en déduit que

$$\boxed{\forall x \in I, \qquad g(x) < x < f(x)}$$

2. (a) On a

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\\ &= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\\ &= \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{6-2}\\ &= \frac{8-2\sqrt{12}}{4}\\ &= 2-\sqrt{3}\end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \qquad \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2-\sqrt{3}}$$

(b) On a

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{12}\right)}{3} = \frac{2\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + 2 - \sqrt{3}}{3} = \frac{4+\sqrt{6}-2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{6}$$

Et

$$g\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{3\sin(\left(\frac{\pi}{12}\right)}{2+\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{3\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{2+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{3\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{8+\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

Ainsi

$$\frac{3\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{8+\sqrt{6}+\sqrt{2}} < \frac{\pi}{12} < \frac{4+\sqrt{6}-2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{6}$$

Et donc

$$\boxed{36\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8+\sqrt{6}+\sqrt{2}} < \pi < 8+2\sqrt{6}-4\sqrt{3}-2\sqrt{2}}$$

Numériquement

Un calcul numérique donne $3.14151 < \pi < 3,1424$

3. (a) Soit θ un réel, on a

$$\cos(2\theta) = \cos(\theta+\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$$

Ainsi

$$\boxed{\forall\theta\in\mathbb{R},\qquad \cos(2\theta) = 1-2\sin^2(\theta)}$$

Soit $n\in\mathbb{N}$. On va prendre $\theta = \frac{\pi}{3\times 2^{n+1}} \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right[$).

On a alors $a_{n+1} = \sin(\theta) > 0$ et $b_{n+1} = \cos(\theta) > 0$.

Ainsi

$$\sqrt{\frac{1-b_n}{2}} = \sqrt{\frac{1-\cos(2\theta)}{2}} = \sqrt{\frac{2\sin^2(\theta)}{2}} = |\sin(\theta)| = \sin(\theta) = a_{n+1}$$

Et

$$\sqrt{\frac{1+b_n}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos(2\theta)}{2}} = \sqrt{\frac{2(1-\sin^2(\theta))}{2}} = |\cos(\theta)|$$

$$\begin{aligned} &= \cos(\theta) \\ &= b_{n+1} \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{\frac{1-b_n}{2}} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{\frac{1+b_n}{2}}}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta = \dfrac{\pi}{3 \times 2^n} \in \left[0, \dfrac{\pi}{6}\right]$).

En appliquant la résultat de la question 1.(f) à $x = \theta$ et en multipliant par 3×2^n, on obtient

$$\boxed{9 \times 2^n \frac{a_n}{2+b_n} < \pi < 2^n \left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right)}$$

(c) On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\pi}{3 \times 2^n} = 0$ d'où

$$a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\pi}{3 \times 2^n} \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} b_n = 1$$

Ainsi

$$9 \times 2^n \frac{a_n}{2+b_n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \pi \quad \text{et } 2^n a_n \left(2 + \frac{1}{b_n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \pi$$

On en déduit

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} 9 \times 2^n \frac{a_n}{2+b_n} = \pi \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} 2^n \left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right) = \pi}$$

Cet exercice présente la méthode développée au 17-ème siècle par Snellius et Huygens pour calculer des valeurs approchées de π. Cette méthode convergeant plus rapidement que les précédentes méthodes elle permettait d'obtenir plus facilement un grand nombre de décimales de π : le précédent record de 35 décimales avait été obtenu en considérant le périmètre d'un polygone à $2^{62} \simeq 4.6 \times 10^{18}$ cotés ; Huygens obtint 34 décimales correctes en considérant $n = 30$ (donc un polygone à $2^3 0$ cotés).

Corrigé de l'exercice 3

1. Par télescopage on a, pour $n \in \mathbb{N}$

$$H_{n+1} - H_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} > 0$$

Ainsi $\boxed{\text{la suite } (H_n)_{n \geqslant 1} \text{ est strictement croissante.}}$

D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que

$\boxed{(H_n)_{n \geqslant 1} \text{ admet une limite finie } L \text{ ou bien diverge vers } +\infty.}$

2. *Première méthode*

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $H_{2n} - H_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$. Or, pour tout $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, $\dfrac{1}{k} \geqslant \dfrac{1}{2n}$.

D'où

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Ainsi $\boxed{H_{2n} - H_n \geqslant \dfrac{1}{2}}$

(b) Supposons, par l'absurde que la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $L \in \mathbb{R}$, alors $\lim H_{2n} = L$ et $\lim H_n = L$. Par addition des limites, il vient $\lim (H_{2n} - H_n) = 0$, ce qui contredit le résultat précédent.

On en déduit que $\boxed{(H_n)_{n\geqslant 1} \text{ diverge vers } +\infty.}$

3. *Deuxième méthode*

(a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $t \in [k, k+1]$, on a $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{k}$, donc, par croissance de l'intégrale, il vient

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}$$

C'est-à-dire $\boxed{\dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k}.}$

(b) D'après la question précédente, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

Ainsi, en sommant ces inégalités pour k allant de 1 à $n-1$ on obtient

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

C'est-à-dire, par télescopage

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(n) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

Un décalage d'indice dans la première somme nous donne

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

On a donc bien $\boxed{H_n - 1 \leqslant \ln(n) \leqslant H_n - \dfrac{1}{n}}$

D'après l'inégalité précédente, on a, d'une part, $H_n \leqslant \ln(n) + 1$ et, d'autre part, $H_n \geqslant \ln(n) + \dfrac{1}{n} \geqslant \ln(n)$.

Finalement on a bien $\boxed{\ln(n) \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1.}$

(c) Tout d'abord, $\lim \ln(n) = +\infty$, donc par comparaison, $\boxed{\lim H_n = +\infty.}$

D'après la question précédente on a, pour tout $n \geqslant 2$

$$1 \leqslant \frac{H_n}{\ln(n)} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$

Comme $\lim \left(1 + \dfrac{1}{\ln(n)}\right) = 1$, le théorème des gendarmes nous assure que $\lim \dfrac{H_n}{\ln(n)} = 1$ et ainsi $\boxed{H_n \sim \ln(n)}$.

(d) Soit $n \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned}\gamma_n - \gamma_{n-1} &= H_n - \ln(n) - H_{n-1} + \ln(n-1) \\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

On sait que, pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant x$

Inégalité

Il suffit d'étudier la fonction $x \mapsto x - \ln(1+x)$

D'où, pour $n \geqslant 2$, $\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right) \leqslant -\dfrac{1}{n}$ i.e. $\dfrac{1}{n} + \ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right) \leqslant 0$

Finalement, pour tout $n \geqslant 2$, $\boxed{\gamma_n - \gamma_{n-1} \leqslant 0.}$

On a montré plus tôt que $\ln(n) \leqslant H_n$, on en déduit donc que $\gamma_n \geqslant 0$. De même on a vu que $H_n - 1 \leqslant \ln(n)$,ce qui montre que $\gamma_n \leqslant 1$.

Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$, $\boxed{0 \leqslant \gamma_n \leqslant 1.}$

La suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ et décroissante et minorée par 0, donc $\boxed{\text{elle converge vers un réel } \gamma \text{ appartenant à } [0,1].}$

Ainsi $\gamma_n - \gamma$ tend vers 0 et on peut écrire $\gamma_n - \gamma \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$ c'est-à-dire $H_n - \ln(n) - \gamma \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$ ou encore :

$$\boxed{H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)}$$

Corrigé de l'exercice 4

1. (a) — 1-er cas. On suppose $0 < p_1 < 1$. Alors la famille $(\{X_1 = 1\}, \{X_1 = 0\})$ est un système complet d'évènements et la formule des probabilités totales entraine :

$$\begin{aligned}
p_2 &= \mathbb{P}(X_2 = 1) \\
&= \mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 = 1)\,\mathbb{P}(X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 = 0)\,\mathbb{P}(X_1 = 0) \\
&= (1 - \mathbb{P}(X_2 = 0 | X_1 = 1))\, p_1 + \beta\,(1 - p_1) \\
&= (1-\alpha)p_1 + \beta\,(1 - p_1) \\
&= \beta + (1 - \alpha - \beta)p_1
\end{aligned}$$

— 2-ème cas. On suppose $p_1 = 1$. Alors

$$p_2 = \mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 = 1)\,\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1 - \alpha = \beta + (1 - \alpha - \beta)p_1$$

— 3-ème cas. On suppose $p_1 = 0$. Alors

$$p_2 = \mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 = 0)\,\mathbb{P}(X_1 = 0) = \beta = \beta + (1 - \alpha - \beta)p_1.$$

Finalement dans tous les cas, on obtient $\boxed{p_2 = \beta + (1 - \alpha - \beta)p_1}$.

(b) En remplaçant X_1 par X_n, X_2 par X_{n+1}, p_1 par p_n et p_2 par p_{n+1}, le raisonnement précédent nous donne

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_{n+1} = \beta + (1 - \alpha - \beta)p_n.}$$

(c) Posons $q = 1 - \alpha - \beta$. Alors la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad p_{n+1} = qp_n + \beta$$

la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ donc est arithmético-géométrique.

Puisque $q \neq 1$ il existe un unique réel r tel que $r = qr + \beta$, il s'agit de $r = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$. On a alors, pour $n \geqslant 1$,

$$\begin{cases} p_{n+1} & = qp_n + \beta \\ r = qr + \beta \end{cases}$$

D'où, en considérant $L_1 - L_2$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad p_{n+1} - r = q(p_n - r)$$

La suite $(p_n - r)_{n\geqslant 1}$ est géométrique de raison q. On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad p_n - \ell = q^{n-1}(p_1 - \ell)$$

puis

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad p_n = \frac{\beta}{\alpha+\beta} + (1-\alpha-\beta)^{n-1}\left(p_1 - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)}$$

(d) On sait que $0 < \alpha < 1$ et $0 < \beta \leqslant 1$, ainsi $0 < \alpha + \beta < 2$ et $-1 < \alpha + \beta - 1 < 1$
Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\alpha-\beta)^{n-1} = 0$ ainsi

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{\beta}{\alpha+\beta}}$$

2. (a) D'après la question 1.(c), il vient $p_2 = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$ et donc $\boxed{X_2 \text{ suit la loi } \mathscr{B}\left(\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\right)}$.

(b) En utilisant la formule

$$\forall (i,j) \in \{0,1\}^2 \qquad \mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j) = \mathbb{P}(X_2 = j \mid X_1 = i)\,\mathbb{P}(X_1 = i)$$

On obtient

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0) = \dfrac{\alpha(1-\beta)}{\alpha+\beta}, & \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) = \dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} \\ \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) = \dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}, & \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = \dfrac{(1-\alpha)\beta}{\alpha+\beta} \end{array}}$$

(c) Puisque X_1 et X_2 suivent la même loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$, X_1 et X_2 admettent une espérance et une variance données par

$$\boxed{\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X_1) = \mathbb{V}(X_2) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\left(1 - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\right) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}.}$$

(d) Puisque X_1 et X_2 sont des variables finies, la covariance entre X_1 et X_2 est définie et donnée par $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \mathbb{E}(X_1X_2) - \mathbb{E}(X_1)\,\mathbb{E}(X_2)$. Puisque $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{E}(X_2)$ sont connues, il nous reste à déterminer $\mathbb{E}(X_1X_2)$. Comme X_1 et X_2 sont à valeurs dans $\{0,1\}$, X_1X_2 est à valeurs dans $\{0,1\}$ donc suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(X_1X_2 = 1)$. En conséquence,

$$\mathbb{E}(X_1X_2) = \mathbb{P}(X_1X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{(1-\alpha)\beta}{\alpha+\beta}$$

puis

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X_1, X_2) &= \frac{(1-\alpha)\beta}{\alpha+\beta} - \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^2 \\ &= \frac{\beta}{\alpha+\beta}\left(1 - \alpha - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\right) \\ &= \frac{\beta}{(\alpha+\beta)^2}[(1-\alpha)(\alpha+\beta) - \beta] \\ &= \frac{\beta}{(\alpha+\beta)^2}\left(\alpha - \alpha\beta - \alpha^2\right) \\ &= \frac{\alpha\beta q}{(\alpha+\beta)^2} \end{aligned}$$

On obtient

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \frac{\alpha\beta q}{(\alpha+\beta)^2}, \qquad \text{où } q = 1 - \alpha - \beta.}$$

(e) Si $q \neq 0$, du fait que $\dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2} > 0$, il vient $\operatorname{Cov}(X_1, X_2) \neq 0$ et on est certain que X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

Au contraire, si $q = 0$, il vient $\operatorname{Cov}(X_1, X_2) = 0$ et X_2 est potentiellement indépendante de X_1. Vérifions que c'est bien le cas. Puisque $q = 0$, il vient $\alpha + \beta = 1, p_1 = p_2 = \beta$ et $1 - p_1 = 1 - p_2 = \alpha$, et en conséquence la loi du couple $(\ X_1, X_2\ )$ est donnée par

$$\begin{array}{ll} \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0) = \alpha^2 = (1-p_1)(1-p_2), & \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) = \alpha\beta = (1-p_1)\,p_2 \\ \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) = \alpha\beta = p_1(1-p_2), & \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = (1-\alpha)\beta = p_1 p_2. \end{array}$$

La loi jointe de (X_1, X_2) est donc le produit des lois marginales de X_1 et de X_2, donc X_1 et X_2 sont indépendantes. Finalement $\boxed{X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes si et seulement si } \alpha + \beta = 1.}$